ЗАДАЦИ – IX НЕДЕЉА

1. Користећи дефиницију ($\varepsilon-\delta$ деф) доказати да је
$$\lim_{x\to-\infty} 2^x = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to 1}(x^2+3)=4.$$

2. Дати пример функције $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ која:
   - а) има прекид у свакој тачки
   - б) непрекидна је само у једној тачки
   - в) има непребројиво много прекида
   - г) непрекидна је и неограничена
   - д) непрекидна, а није равномерно непрекидна
   - ђ) има тачно два прекида, од I врсте
   - е) има пребројиво много прекида

3. Доказати да је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=[x]\sin(\pi x)$ непрекидна ф-ја.

4. Израчунати $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^2-n+1)}{\log(n^{10}+n^5+1)}$.

5. Ако за функцију $f:(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\to(0,+\infty)$ важи
$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+\frac{1}{f(x)}\right)=2,$$
доказати да тада $\lim_{x\to a} f(x)=1$.

6. Израчунати $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\sin x}$

7. Одредити тачке и врсте прекида ф-је: $f(x)=\operatorname{sgn}(\sin x)$.

(8.) Посматрајмо скуп $S = \{ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ непрекидна} \}$.

Доказати: а) $\operatorname{card} \mathbb{R} \leq \operatorname{card} S$

б) $\operatorname{card} S = \operatorname{card} \mathbb{R}$.

(9.) Нека је $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ непрекидна ф-ја за коју постоји

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \alpha \in \mathbb{R}.$$

а) Доказати да је f ограничена.

б) Доказати да је f равномерно непрекидна.

(10.) Испитати ограниченост и равномерну непрекидност функција: а) $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1+x}$

б) $g: (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{x}$

в) $h: (0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \sin \frac{\pi}{x}$.

(11.) Нека је $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрекидна функција таква да је $f(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{Q}$. Доказати да је f константна.

(12.) Нека је $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна функција.

Доказати да су функције

$m, M: [a,b] \to \mathbb{R}$

$$M(x) = \max_{t \in [a,x]} f(t), \quad m(x) = \min_{t \in [a,x]} f(t)$$

добро дефинисане и непрекидне. Да ли су равномерно непр?

(13.) Нека је P полином. Доказати да $|P(x)|$ достиже минимум у некој тачки $c \in \mathbb{R}$.

14. Испитати конвергенцију следећих низова:

а) $a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \dots + \frac{\sin n}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

б) $b_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$

15. Дати пример низа чије су тачке нагомилавања 1, 3, 7 и 10 и који је неограничен.

16. Нека су (a_n), (b_n) два низа. Доказати:

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varliminf_{n\to\infty} b_n \leq \varliminf_{n\to\infty} (a_n+b_n) \leq \varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

$$\varliminf_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n \leq \varlimsup_{n\to\infty} (a_n+b_n) \leq \varlimsup_{n\to\infty} a_n + \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

17. Нека низ (a_n) задовољава $0 \leq a_{m+n} \leq a_m + a_n$ $\forall m,n \in \mathbb{N}$

Доказати да тада низ $\frac{a_n}{n}$ конвергира.

18. Испитати конвергенцију и наћи лимес (уколико постоји) следећих низова

а) $a_n = \frac{1^p + 3^p + 5^p + \dots + (2n+1)^p}{n^{p+1}}$

б) $b_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$.

в) c_n је низ задат са: $c_1 = 1$, $c_{n+1} = 1 - \frac{1}{4c_n}$

19. Ф-ја $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ је Липшицова са константом $L \geq 0$ (или L-Липшицова) ако за $\forall x,y \in \mathbb{R}$ важи

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x-y|.$$

а) Доказати да је свака Липшицова ф-ја равномерно непрекидна.

б) Нека је f L-Липшицова и $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ конвергентан низ. Доказати да је низ $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ такође конвергентан.

в) Нека је f L-Липшицова где је $L<1$. Доказати да f има фиксну тачку.